

## II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

2016- 2017 навчальний рік

6 клас

1. Гномики зібрали в подарунок для Білосніжки – 1000 смарагдів. Кількість смарагдів, принесених кожним гномиком, можна записати числом, що в своєму записі містить лише цифру 5. Якщо скласти вираз у вигляді суми цих чисел, то в записі суми нарахували 20 п'ятірок. Знайди скільки гномиків привітали Білосніжку?
2. Знайти найбільше число, якщо відомо, що всі його цифри різні, а їх добуток дорівнює 360.
3. В пересувному цирку було троє поні : чорний, сивий і рябий. Гриви в них – біла, срібна і золота, а вуздечки – червона, синя і зелена. Вуздечка у сивого поні не червона, а у рябого – не синя. Поні з зеленою вуздечкою – білогривий, а в поні з червоною вуздечкою грива не срібна, а в першого поні - золота. Яка грива і яка вуздечка у кожного поні?
4. Числа складаються з 2016 однакових цифр. Скільки серед цих чисел таких, що: 1) діляться на 45; 2) діляться на 6.
5. Вовчик-братик мав 60 монет і збирався витратити їх на смачний обід. Однак прибігла Лисичка-сестричка й підкинула Вовчику-брату одну фальшиву монету. Тепер у Вовчика - брата 61 монета, серед яких одна фальшива. Як йому за два зважування визначити, легша чи важча фальшивка за решту монет?

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів не дозволяється

**II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.  
2016- 2017 навчальний рік  
7 клас**

1. Дирекція лісгоспу вирішила вирубати дубовий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор лісгоспу всіх заспокоїв, сказавши: «У вашому лісі 99% дубів. Ми будемо рубати тільки їх, причому після рубки дубів залишиться 98% від всіх дерев». Яку частину лісу має намір вирубати лісгосп?
  
2. На дорозі між Яремче і Буковель горизонтальних дільниць немає. Автобус вгору їде зі швидкістю 15 км/год, а вниз – 30 км/год. Яка відстань між цими пунктами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години?
  
3. Дано чотири геометричні фігури: піраміда, конус, куля і куб. Кольори цих фігур – зелений, жовтий, синій, червоний. Фігури розклали в ряд. У якій послідовності розміщені ці фігури та який колір кожної з них, якщо фігура червоного кольору знаходиться між зеленою і синьою, праворуч від жовтої фігури знаходиться конус, куля розміщена правіше від піраміди і конуса, причому піраміда знаходиться не з краю, і, нарешті, фігура синього кольору не поруч із фігурою жовтого кольору?
  
4. Миколка задумав три різні цифри (відмінні від нуля). Марійка з цих цифр склала всі можливі двоцифрові числа, додала їх і отримала суму 231. Які цифри задумав Миколка?
  
5. Сума градусних мір двох кутів  $\text{AOB}$  і  $\text{BOT}$  дорівнює  $264^\circ$ . Знайти їхні градусні міри, якщо промінь, доповняльний до променя  $\text{OA}$ , є бісектрисою кута  $\text{BOT}$ .  $\text{OP}$ - бісектриса кута  $\text{AOB}$ , промінь  $\text{OM}$  перпендикулярний з  $\text{OA}$ . Знайдіть градусну міру кута  $\text{POM}$ .

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів не дозволяється

**II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.  
2016- 2017 навчальний рік**

**8 Клас**

1. На аркуші були записані перші 20 натуральних чисел. Одне з них замалювали, і виявилось, що серед 19 чисел, що залишились, є число, рівне середньому арифметичному цих 19 чисел. Яке число замалювали?

2. Розкладіть на множники многочлен:  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ .

3. Бісектриса та медіана, проведені з вершини прямого кута трикутника до перетину з гіпотенузою, є сторонами рівнобедреного трикутника. Знайти гострі кути даного прямокутного трикутника.

4. Туристична група складається з 23 школярів десяти, одинадцяти, дванадцяти та тринадцяти років, разом всім туристам 253 роки. Скільки в цій групі дванадцяти річних школярів, якщо відомо що їх в півтора рази більше ніж тринадцяти річних?

5. Знайдіть  $x + y$ , якщо  $x^3 + y^3 = 9$ , а  $x^2y + xy^2 = 6$ .

На виконання роботи відводиться 4 години.  
Кожна задача оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

**II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.  
2016- 2017 навчальний рік**

**9 клас**

1. Автослюсар отримав завдання на виготовлення кількох комплектів деталей для восьмициліндрових автомобільних двигунів. Слюсар підрахував, що коли йому вдасться підвищити продуктивність праці на 0,1 дет/год, то він зможе виконати завдання на 12 год раніше строку, а якщо ще на 0,5 дет./год, то виконає завдання на 36 год раніше строку. Скільки деталей потрібно виготовити слюсарю?

2. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \frac{9}{10}$$

3. Основа  $AB$  трапеції  $ABCD$  вдвічі довша від основи  $CD$  і вдвічі довша за бічну сторону  $AD$ . Знайти площу трапеції, якщо діагональ  $AC = a$ , а бічна сторона  $BC = b$ .

4. Нехай  $a, b, c$  сторони трикутника. Доведіть нерівність:

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$

5. Є ланцюжок з  $n$  ( $n > 6$ ) сосисок. Два коти по черзі перегризають по одній перемичці між сосисками і з'їдають утворені одинарні сосиски. Виграє той кіт, який з'їсть більше сосисок. Опишіть виграшну тактику кота-переможця.

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

**II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.  
2016- 2017 навчальний рік**

**10 клас**

1. Добуток всіх членів геометричної прогресії  $b_1; b_2; \dots; b_{25}$ , що мають непарні номери в 2017 разів більший за добуток всіх її членів з парними номерами. Знайти  $b_{13}$ .

2. З пункту А по річці відправився пліт. Одночасно йому назустріч вийшов катер з пункту В. Після зустрічі з плотом катер одразу развертається і рухається до пункту В. Яку частину відстані від А до В пройде пліт від моменту повернення катера в пункт В, якщо швидкість катера в 4 рази перевищує швидкість течії.

3. Розв'яжіть нерівність  $(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) < 10$ .

4. Кожна грань куба зафарбована в чорний або білий колір. Доведіть, що знайдуться дві грані однакового кольору зі спільним ребром.

5. Сторони паралелограма дорівнюють  $a$  і  $b$ , а діагоналі  $d_1$  і  $d_2$ . Відомо, що  $a^4 + b^4 = d_1^2 d_2^2$ . Доведіть, що гострий кут паралелограма дорівнює  $45^\circ$ .

На виконання роботи відводиться 4 години.  
Кожна задача оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється  
**II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**  
**2016- 2017 навчальний рік**

**11 клас**

1. Розв'язати рівняння :  $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2 + 5x} = 25 - 2x$

2. Знайдіть значення виразу  $\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ , якщо відомо, що  $\alpha, \beta, \gamma$  - внутрішні кути трикутника і  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ .

3. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі трапеції, щоб її площа була найбільшою?

4. Знайдіть значення параметра  $a$  при якому нерівність:

$$x^2 + 2ax + 3a - 2 > 0, \text{ виконується при всіх } x > -0,5.$$

5. Доведіть нерівність:

$$2^{n+1} > 2n + 3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

На виконання роботи відводиться 4 години.  
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів не дозволяється